

# Sobre a importância do rigor matemático

Daniel C. Bastos  
dbastos@toledo.com

13 de outubro de 2009

## Abstract

Fazemos uma discussão não rigorosa sobre o rigor matemático.

## 1 Introdução

Existem vários contextos onde rigor não é bem-vindo. A matemática, entretanto, é uma ciência rigorosa, por definição. Quando falamos em matemática, falamos em formalização rigorosa.

Suponha que desejamos um procedimento para encontrar números primos. Não precisa ser todos; mas que seja sempre uma forma de gerar novos números primos. Os números que são primos, você sabe, são aqueles que são filhos de sua tia. Claro que não. São aqueles que vêm primeiro. “Primo” em português é o *premiere* francês; o *prime* inglês.

Eis aqui uma estória real. Quando o Criador resolveu construir os números, ele fez o 2 primeiro, depois o 3, e depois o 5. Ele não se preocupou com o 4 porque ele notou que bastava bater com sua varinha duas vezes no 2 que lá estaria o 4. Do 5, ele pulou pro 7 porque ele sabia que para o 6 bastava bater com sua varinha no 2 e no 3 e lá estaria o 6. Com exceção do zero e do um, que são criações especiais do Criador, todos os números naturais são expressos como um produto de números primos; eis aí o teorema fundamental da aritmética — uma parte dele. Então  $2 = 2$ ,  $3 = 3$ ,  $4 = 2 \times 2$ ,  $5 = 5$ ,  $6 = 2 \times 3$ ,  $7 = 7$ , ...,  $10 = 2 \times 5$ , ... Note que os números naturais são expressos ou por eles próprios, ou por um produto de números anteriores cujos produtos são eles próprios — são primos.

Mas enfim. Se tenho o 2 e o 3, posso gerar um novo primo fazendo  $(2 \times 3) + 1 = 7$ . O 5 ficou pra trás, mas o 7 é primo. Com o 2, 3, 5 e 7 posso inventar o  $(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$ ; vários primos ficaram para trás, mas o 211 é primo. Com o 2, 3, 5, 7, e 11 posso inventar o  $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 2311$  que é primo. Começo a achar que este é um procedimento que sempre me dará números primos. Mas como sou um rapaz latino americano, resolvi dar uma queixadinha e exigir uma prova. Então vamos construí-la.

O que é preciso? Queremos provar que se pegamos um produto de números primos sequenciais —  $2 \times 3 \times \dots \times p_n$  — e adicionamos 1, obtemos um novo primo. (Note que o produto usa todos os primos existentes entre 2 e  $p_n$ , inclusive; é o que quis dizer com “sequenciais.”) Como faremos?

Vamos escrever esse produto de números primos, de forma genérica; assim  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ ; daí adicionamos 1 à expressão, e aí damos um nome à expressão; um nome como  $M$ , e aí damos uma analisada em  $M$ . Como  $M$  é um número natural, ele será primo ou não; se não for, estaria provado o contrário do que desejamos; se for, missão cumprida. Então vamos.

**Proposição 1.1.** Considere o número natural

$$M = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n) + 1,$$

onde cada  $p_i$  é um número primo. Afirmamos que  $M$  é primo. (Note que " $p_i$ " é uma forma de representar qualquer um desses primos; ou seja, qualquer um entre  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . A idéia da notação é que o  $i$  é um variável que toma os valores  $1, 2, 3, 4, \dots, n$ .)

*Prova.* Como todo natural,  $M$  é primo ou não é. Suponha que ele não seja primo. Isto significa que algum  $p_i$  é divisor dele. Isto é, ou  $p_1$  ou  $p_2$  ou ... ou  $p_n$  (pelo menos um deles) vai dividir  $M$  de tal forma que a divisão resulta num número inteiro, assim como  $6 \div 3 = 2$ . Se dividimos  $M$  por  $p_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{M}{p_1} &= \frac{p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n}{p_1} + \frac{1}{p_1} \\ &= \frac{p_1}{p_1} \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n + \frac{1}{p_1} \\ &= 1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n + \frac{1}{p_1} \\ &= p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n + \frac{1}{p_1}. \end{aligned}$$

Só que  $1/p_1$  não é inteiro. Então  $M/p_1$  não é um número inteiro, e logo  $p_1$  não é divisor de  $M$ . Talvez  $p_2$  seja; talvez  $p_3$  ... Entretanto, você pode observar que após a divisão sempre restará a soma com  $1/p_i$ , e como 1 dividido por alguma coisa nunca é um número inteiro, essa divisão nunca será exata. Logo, nenhum desses primos dividem  $M$ , e então  $M$  é primo.

Mas supomos que  $M$  não era primo. Isto é, estamos com o fato de que  $M$  é primo e ao mesmo tempo não é primo. Temos uma contradição derivável da suposição de que  $M$  não é primo. Então esta suposição é absurda. Logo,  $M$  é primo.  $\square$

Mas veja, o número 13 é primo, e  $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$ . Ou seja, 30,031 não é primo. É preciso haver algo errado na nossa prova, ou estamos com sérios problemas.

Note que 59 e 509 são primos maiores que 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Ou seja, os primos que utilizamos para construir o novo primo não são apenas os únicos possíveis divisores dos números que construímos. Nossa prova tacitamente assume este fato com "[i]sto significa que algum  $p_i$  é divisor dele." E não é verdade isso como 30031 demonstra. Isto é, há outros números além dos  $p_i$  que podem ser divisores do número  $M$  construídos apenas com um produto de  $p_i$  adicionado com 1. Eis a surpresinha do Criador.

Então os estudantes de matemática ficam sempre muito suspeitos e atentos às suposições, que muitas vezes vêm implícitas nas coisas que dizemos. Assim, na matemática existe todo um rigor que ajuda a expor o que está envolvido para que nada passe desapercibido.

## 2 Falando em produtos...

Falemos em somas. Suponha que queiramos somar os números 1, 2, 3, 4, ..., 5064. Todos eles. Seria um árduo trabalho. Vamos dar uma olhada no que seria necessário para somar 1, 2, 3, ..., 10. Escrevemos a soma.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Observe que  $10 + 1 = 11$ . Reescrevemos a soma.

$$11 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Observe que  $9 + 2 = 11$ . Reescrevemos a soma.

$$11 + 11 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

Observe que  $8 + 3 = 11$ . Reescrevemos a soma.

$$11 + 11 + 11 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Observe que  $7 + 4 = 11$ . Reescrevemos a soma.

$$11 + 11 + 11 + 11 + 5 + 6$$

Observe que  $5 + 6 = 11$ . Reescrevemos a soma.

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

Desejávamos somar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Reescrevemos a soma em termos de números 11. Houveram 5 deles. O 10 casou com o 1, o 9 com o 2, o 8 com o 3, o 7 com o 4, o 6 com o 5. 5 vezes 11 dá 55. Esta é a soma.

Desejávamos somar 10 números. 10 é par. Nenhum número ficará sem seu casal, porque há um número par de números. Sempre que houver uma quantidade par de números em sequência — como acima —, podemos casar o último com o primeiro, e reconsiderar o problema. Casando todos eles, haverá um número de casais equivalente à metade da quantidade de números que tínhamos.

Agora, se o último da lista é, por exemplo, o 10, como acima, e o primeiro é o 1, então os casais vão sempre formar 11. Como haverão 5 casais, teremos uma soma equivalente a 5 vezes 11 que é 55. Isto é, a soma de  $1 + 2 + \dots + 10$  é  $11 \times (10 \div 2)$ .

Dessa forma, podemos conjecturar (isto é, chutar!, em matemátiquês) que uma soma de  $1 + 2 + \dots + 5064$  vai ser  $5065 \times (5064 \div 2)$ . Você acha que isso vai dar certo? O resultado seria 12,824,580. Doze milhões e alguma coisa. Perguntando à minha calculadora, ela diz que

```
> (foldl + 0 (build-list 5064 (lambda (x) (+ x 1))))
12824580
```

Parece bom. Mas o fato é que estamos traumatizados com a catástrofe anterior. O rigor matemático, entretanto, exige um argumento mais sofisticado — chamado de prova por indução matemática — para que encerremos a questão. De qualquer forma, estamos sugerindo que tais somas podem ser representadas por uma fórmula como

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n + 1) \times (n/2).$$

Veja que aparentemente ela funciona. Se  $n = 1$ , então temos  $1 = 2 \times 1/2$ ; se  $n = 2$ , temos  $1 + 2 = 3 \times 1/1$ ; se  $n = 3$ , temos  $1 + 2 + 3 = 4 \times 3/2$ . Todos esses funcionam. Funciona também o caso  $n = 5064$ .

Note ainda que durante nosso raciocínio, consideramos apenas  $n$  sendo um número par; 3 é ímpar e ainda assim parece funcionar; veja que  $n = 5$  também funciona. Isto é, por algum mistério, até a soma dos números  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$  onde  $n$  é ímpar parece respeitar a fórmula. E, de fato, funciona para todos os números naturais. Este é um caso onde o resultado é positivo. Mas, enfim, devido a tanta surpresinha do Criador, os matemáticos agora estão todos mais rigorosos, e assim a matemática fica também muito mais divertida — outra surpresinha do Criador; quem diria que rigor seria qualquer coisa divertido?