

Sobre a notação dy/dx do Leibniz

Daniel C. Bastos
dbastos@toledo.com

September 30th, 2007

Abstract

Ao solucionar equações diferenciais separáveis de primeira ordem, usualmente utilizamos um atalho proporcionado pela algebrização da notação do Leibniz. Entretanto, este atalho necessita de justificação ou sofremos a acusação de construirmos um argumento falacioso. Discutimos neste documento a formalização necessária.

1 Introdução

Teorema 1.1. Declare $y = Y(x)$ uma solução de

$$A(y)y' = Q(x) \quad (1)$$

tal que Y' é contínua num intervalo I . Assuma que Q and $(A \circ Y)$ são contínuas em I . Declare G uma antiderivada de A . Daí y satisfaz

$$G(y) = \int Q(x) dx + C. \quad (2)$$

E, conversamente, se y satisfaz (2) então y é solução de (1). \square

Prova. Já que Y é solução de (1), então

$$A(Y(x))Y'(x) = Q(x) \quad (3)$$

pra cada x em I . Já que $G' = A$, então (1) nos dá

$$G'(Y(x))Y'(x) = Q(x).$$

Mas $G'(Y(x))Y'(x)$ é a derivada de $G(Y(x))$, que então é uma antiderivada de Q ; isto é

$$G(Y(x)) = \int Q(x) dx + C, \quad (4)$$

e assim a primeira parte do teorema está provada. (Note a constante C . Quando integramos $G'(Y(x))Y'(x)$, uma constante aparece; chame ela de D ; então $C = -D$.)

Agora assume que y satisfaz (2). Derivando-a, obtemos

$$A(y)y' = Q(x),$$

que era o que desejávamos. \square

Interessante, não? Temos aqui apenas uma relação entre equações. A mesma função y que satisfaz $A(y)y' = Q(x)$, satisfaz também

$$G(y) = \int Q(x) dx + C.$$

2 A importância desta relação

Considere a equação $y'(x) = y(x)$, onde y' é a derivada de y . Implícito nesta notação está o fato de que y é uma variável dependente de x . Álgebra permite dizermos que

$$(1/y(x))y'(x) = 1.$$

Declare agora $A(y) = 1/y$ e $Q(x) = 1$. Declare $G(y)$ uma anti-derivada de $A(y)$ — como por exemplo $\ln|y|$. O teorema acima nos permite dizer que esta função y também satisfaz a equação

$$G(y) = \int Q(x) dx + C.$$

Logo, para descobrir uma anti-derivada de $A(y)$, basta integrar $Q(x)$ com respeito à x . E perceba que isto é o mesmo que integrar $A(y)$ com respeito à y , ou integrar $A(y)y'(x)$ com respeito à x . Escolhemos então a integração mais fácil, e assim sabemos das outras também.

Este é o raciocínio necessário para solucionar equações diferenciais separáveis de primeira ordem. O que alguns livros fazem, como por exemplo o famoso “Calculus” do James Stewart, é aplicar este teorema através de um truque da notação de Leibniz. Stewart, entretanto, nem menciona este teorema, deixando este buraco e resultando num misticismo a respeito da notação de Leibniz.

Olhemos de mais perto. Considere novamente $dy/dx = y$. Para solucionar esta equação, precisamos invocar o teorema acima. Ao invés, entretanto, deixemos que dy e dx sejam, em si, variáveis distintas, e por uma questão de curiosidade, operemos a equação de forma que escrevemos

$$dy/dx = y \tag{5}$$

$$(1/y) dy = dx \tag{6}$$

Voltemos nossa atenção agora a equação

$$\int (1/y) dy = \int dx. \tag{7}$$

Sabemos que o lado direito é equivalente à $x + C_1$, e que o lado esquerdo é equivalente à $\ln|y| + C_2$. Podemos agora isolar y através de uma aplicação da inversa de \ln , e estaríamos satisfeitos.

Ou seja, se houver uma conexão entre (5) e (7), fica descrito aí um procedimento que é fácil de lembrar, devido a algebrização dos símbolos dy e dx , e que nos permite expressar y em função de x — isto é, solucionar a equação. Existe uma conexão e ela é o teorema acima. Mas note que sem conhecer esta conexão, a aplicação deste procedimento não oferece, intrinsecamente, uma solução. Eis aí um exemplo da importância da honestidade intelectual.

3 Os diferenciais

Os diferenciais compõe a parte de Cálculo que permite o tratamento de dy e dx como objetos distintos. (Note que sem uma formalização deles, nem mesmo o passo que nos leva de (5) à (6) é válido.)

A motivação pra isso é que uma derivada é essencialmente uma fórmula que descreve

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (8)$$

onde y é uma função de x , e os deltas descrevem uma variação em suas respectivas variáveis.

Daí surge a idéia de se pensar em dy e dx como Δy e Δx quando Δx já chegou a zero. Só que isso é essencialmente inválido já que um limite “não chega” a qualquer lugar. A vontade de tal justificação, entretanto, foi muito grande e várias tentativas foram feitas — os hiperreais, por exemplo, que acredito ser uma teoria inválida, já que a linha real é de fato completa, não restando “lugar” para outros números; fica sendo necessário considerar a linha hiperreal — uma outra linha, um outro sistema numérico —, mas o mesmo problema aparece, penso.

Agora, para toda função $y(x)$ diferencial, existe uma derivada; logo, podemos construir uma função linear $L(x)$ tangente à $y(x)$, num ponto $x = a$. Sempre podemos. $L(x)$ sempre terá a mesma inclinação em qualquer ponto de si própria e ainda a mesma inclinação que $y(x)$ no ponto $x = a$. Se definirmos dy como a variação de $L(x)$, e dx como a variação de x — o x de $L(x)$ —, então dy/dx vem a representar perfeitamente a inclinação de $y(x)$ no ponto $x = a$. Isto é,

$$\frac{dy_a}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_a}{\Delta x} \quad (9)$$

$$= \frac{\Delta L}{\Delta x}. \quad (10)$$

Eis a idéia.

Note, entretanto, que ainda assim isso não justifica qualquer álgebra que nos leve de (5) à (7). O que podemos agora fazer é ir de (5) à (6). O passo (7), entretanto, é derivável pelo teorema que discutimos anteriormente; então estamos completamente justificados.

4 Diferenciação em cadeia

Agora que estamos bem versados na notação do Leibniz, e possuímos até os diferenciais, podemos aproveitar o momento para mudar um pouco de assunto, definir uma propriedade importante de funções diferenciáveis e provar o teorema da cadeia. Antes, um lema, entretanto.

Lema 4.1. Se $y = f(x)$ é diferencial, então f satisfaz

$$\Delta y = f'(a)\Delta x - e\Delta x,$$

onde a é um certo ponto do domínio e $e = f'(a) - \Delta y/\Delta x$. Isto é, e mede quão próximo a aproximação está da derivada.

Prova. Declare $y = f(x)$, e permita que x varie de a para $a + \Delta x$. Então a variação em y é descrita por $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Ou seja, é altura final pós-deslocamento menos a altura inicial. Dividindo esta equação por Δx , obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \quad (11)$$

O limite de (11) com Δx arbitrariamente próximo de zero, é a derivada de $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. (Já se não computamos o limite, a equação é apenas uma aproximação da derivada.) Sendo e a margem de erro da aproximação, observamos que

$$f'(a) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = e \quad (12)$$

$$f'(a)\Delta x - \Delta y = e\Delta x \quad (13)$$

$$f'(a)\Delta x - e\Delta x = \Delta y, \quad (14)$$

como desejado. Observe que este lema descreve uma propriedade de funções diferenciais, que utilizaremos a seguir. \square

Teorema 4.2. Considere $y = f(g(x))$ uma função diferenciável. Daí

$$dy/dx = f'(g(a))g'(a)$$

num determinado ponto $x = a$.

Prova. Uma composição $f(g(x))$ envolve duas funções, g e f . Se ambas são diferenciáveis, ambas respeitam o lema acima. Logo, se $u = g(x)$, então num ponto $x = a$, temos

$$\Delta u = g'(a)\Delta x + e_1\Delta x \quad (15)$$

$$= (g'(a) + e_1)\Delta x. \quad (16)$$

e para f , num ponto $g(a)$ (note que $f(a)$ não é necessariamente definido), temos

$$\Delta y = f'(g(a))\Delta u + e_2\Delta u \quad (17)$$

$$= (f'(g(a)) + e_2)\Delta u \quad (18)$$

$$= (f'(g(a)) + e_2)(g'(a) + e_1)\Delta x \quad (19)$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(g(a) + e_2)(g'(a) + e_1). \quad (20)$$

Se exigimos Δx arbitrariamente próximo de zero, $\Delta u/\Delta x$ fica arbitrariamente próximo de $u' = g'(x)$, e logo temos e_1 arbitrariamente próximo de 0. Da mesma forma, se $\Delta u \rightarrow 0$, então $e_2 \rightarrow 0$. Daí $dy/dx = f'(g(a))g'(a)$. \square

Isto é, a inclinação de uma composição é o produto das inclinações das funções que descrevem a composição; o teorema da cadeia.